УДК 624.074
МРНТИ 14.25.09
DOI 10.56525/YEWW7188

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

М.Ж. ЖУМАБАЕВ
***А.Б. ШЫРАКБАЕВ**
Международный Таразский и
нновационный институт
имени Ш. Муртазы
Тараз, Казахстан
***Автор корреспондент: abaishirak@mail.ru.**

Аннотация. Рассматривеатся ортотропная цилиндрическая с тяжелым с натяжным (γ_z-удельный вес заполнителя) упругим заполнителем конечной длины. Заполнитель имеет форму полого цилиндра или конуса. По наружной поверхности $r = R$, заполнитель жестко скреплен с оболочкой так, что вектор перемещений и вектор напряжений изменяются непрерывно при переходе от заполнителя к оболочке.

Ключевые слова: Цилиндрическая оболочка, напряжение, нагруженной поверхность, треугольник, связь.

Введение. Результаты полученные качественные согаласуется с результатами работ [4,5], дополняют в части влияния размеров конструкции и условий закрепления, как заполнителя так и оболочки. Можно лишь отметить, что в рассматриваемом случае напряженность конструкции полностью определяется ее напряженностью в окрестности поверхности закрепления точек нижнего торца несущей оболочки. Если уровни напряжения окажутся критическими, то они могут быть снижены конструктивными мероприятии. Последние заключены в том, что закрепляются отдельные области нижней торцевой поверхности заполнителя. Частичное закрепление нижнего торца заполнителя приводит к заметному снижению напряжений на контактной поверхности. Радиальные и окружные напряжения, соответствующие этим граничным условиям, всюду становятся сжимающими. Характер распределения радиальных, окружных и осевых напряжений в заполнителе одинаков с их распределением в облочке.

На внутренней и торцевых поверхностях заполнителя заданы напряжения. Они равны

$$\sigma_r = F_1(r), \quad \sigma_{rz} = \Phi_1(r) \text{ при } z = 0$$

$$\sigma_z = F_2(ч), \quad \sigma_{rz} = \Phi_2(r) \text{ при } z = L \qquad (1)$$

$$\sigma_r = F_3(ч), \quad \sigma_{rz} = \Phi_3(z) \text{ при } z = R_0$$

Наряду с условиями (2) ниже представлены результаты рассмотренной задачи в случае, когда на части поверхности $z = 0$ заполнитель жестко закреплен.

$$u = w = 0, \quad \forall\, r \in [R_0, R_*], \; z = 0 \qquad (2)$$

$$\sigma_z = F_1(r), \quad \sigma_{rz} = \Phi_1(r), \; \forall\, r \in]R_*, R_1[, \; z = 0$$

Здесь $R_0 = R_0 \le R_1$.

При этом оболочка занимает пространство

$$R_1 \le r \le R_2, \quad 0 < z \le L. \qquad (3)$$

Контактные условия для оболочки формулируются не на срединной поверхности оболочки, а на внутренней ее поверхности $r = R_2$. Кроме того, могут быть заданы внешнее давление и сдвиговые напряжения

$$\sigma_r = p(z), \quad \sigma_{rz} = q(z), \ \forall\ r \in r = R_2 \tag{4}$$

Нижний торец оболочки $z = 0$ считается закрепленным, а на верхнем $(z = L)$– заданы осевые и касательные напряжения $[1,3]$.

$$u = w = 0 \text{ при } z = 0$$
$$\sigma_z = P(r),\ \sigma_{rz} = Q(r), \text{ при } z = L \tag{5}$$

Материалы и методы. При решении задачи используются кольцевые треугольные элементы. Рассматривемая оболочка с заполнителем находится в осесимметричном напряженном состоянии. Поэтому, достаточно рассмотреть аксиальное сечение. Аксиальным сечением кольцевого треугольного элемента является треугольный элемент с узлами *q, s, t*. Узловые перемещения точки обозначаются

$$\{\delta_i\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \ i = q, s, t. \tag{6}$$

а перемещения вершин треугольного элемента

$$\{\delta\}_e = \{\delta_q, \delta_s, \delta_t\}. \tag{7}$$

Перемещения внутри треугольного элемента представляются линейным полиномом.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z,\ w = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z. \tag{8}$$

Поэтому перемещения вершин *q, s, t* треугольного элемента будут

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 r_i + \alpha_3 z_i,\ i = q, s, t. \tag{9}$$

Отсюда находятся коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Перемещения

$$u = \frac{1}{S}\Sigma\left(a_i + в_i r + c_i z\right)u_i, \tag{10}$$

где

$$S = a_q + a_s + a_t,\ a_q = r_s z_t - r_i z_s,\ a_s = r_t z_q - r_t z_q,$$
$$a_t = r_q z_s - r_s z_q,\ в_q = z_s - z_t,\ в_s = z_t - z_q,\ в_t = z_q - z_s,$$
$$c_q = r_t - r_s,\ c_s = r_q - r_t,\ c_t = r_s - r_q.$$

Аналогично можно получить для

$$W = \frac{1}{S}\Sigma\left(a_t + b_i r + c_i z\right)w_i \tag{11}$$

Связь между перемещениями в кольцевом треугольном элементе с перемещениями вершин имеет вид

$$\{\delta\} = N\{\delta\}_e \tag{12}$$

Здесь

$$N = \{N_q, N_s, N_t\},\ N_i = \begin{bmatrix} a_i + b_i r + c_i z & 0 \\ 0 & a_i + b_i z + c_i z \end{bmatrix}.$$

Используя выше приведенные соотношения можно получить

$$\{\varepsilon\} = B\{\delta\}_e,\ B = \{B_q, B_s, B_t\}. \tag{13}$$

$$B_i = \frac{1}{S}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ \dfrac{a_i + b_i r + c_i z}{r} & 0 \\ 0 & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad i = q, s, t .$$

Элементы матрицы содержит переменныеr r, z.

Связь между компонентами напряжений и деформации для ортотронного материала $\{\sigma\} = Д\{\varepsilon\}$.

$$\{\sigma\} = [\sigma_i], \ \{\varepsilon\} = [\varepsilon_i], \ Д = [d_{ij}], \ i, j = 1,2,3,4 . \quad (14)$$

Здесь

$$d = 1/\left(1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r} - \nu_{rz}\nu_{zr} - \nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi} - 2\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z}\nu_{rz}\right),$$

$$d_{11} = dE_r\left(1 - \nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}\right), \ d_{22} = dE_\varphi\left(1 - \nu_{rz}\nu_{zr}\right),$$

$$d_{33} = dE_z\left(1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}\right), \ d_{12} = d_{21} = dE_r\left(\nu_{\varphi r} + \nu_{rz}\nu_{\varphi z}\right),$$

$$d_{13} = d_{31} = dE_r\left(\nu_{zr} + \nu_{\varphi r}\nu_{z\varphi}\right),$$

$$d_{23} = d_{32} = dE_\varphi\left(\nu_{z\varphi} + \nu_{r\varphi}\nu_{zr}\right), \ d_{44} = \mu_{13},$$

$$d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{41} = d_{42} = d_{43} = 0 .$$

Рассматриваемый кольцевой треугольный элемент будет находиться в состоянии равновесия, если действие отброшенных участков заменить статически эквивалентной системой сил, приложенных в вершинах кольцевого треугольного элемента, это система сил

$$\{F\}_e = \{F_{r,q}, F_{z,q}, F_{r,s}, F_{z,s}, F_{r,t}, F_{z,t}\}^T . \quad (15)$$

Первый индекс соответствует направлению силы, а второй индекс указывает номер вершины треугольного элемента.

Из равенства работы внешних сил и суммарной внутренней работы на виртуальных перемещениях получается

$$\{F\}_e = \left(\int B^T ДBdV\right)\{\delta\}_e - \int_e N^T \{P\} dV . \quad (16)$$

Здесь – $\int N^T \{P\} dV = \{F\}_e^P$ узловые силы, обусловленные распределенными нагрузками и

$$\left(\int B^T ДBdV\right)\{\delta\}_e = \{F\}_e - \{F\}_e^P \quad (17)$$

Если обозначить $\mathrm{K}_e = \int B^T ДBdV$, то матрица жесткости элемента имеет вид

$$\mathrm{K}_e = 2\pi \int B^T ДBrdrdz \quad (18)$$

В результате интегрирования получается матрица жесткости кольцевого треугольного элемента. Около каждой узловой точки *i* находяться *к* кольцевых треугольных элемента $4 \le L \le 8$. Компоненты действующих сил в этой точке обозначаются через $F_{r,j}, F_{z,j} \dots$. Для каждого кольцевого элемента могут быть записаны два уравнения, связывающие составляющие силы в точке *i*, действующие на этот кольцевой треугольный элемент и компоненты перемещений трех его вершин. Коэффициентами этих уравнений являются элементы матрицы жесткости кольцевых треугольных элементов, обьединяющихся в узловой точке *i*. Найдя их сумму, можно получить систему, состоящую из двух уравнений, связывающих компоненты сил $F_{r,i}, F_{z,r}$ с компонентами перемещений в точке *i* и в остальных вершинах кольцевых треугольных элементов, обьядиняющихся в узловой точке *i*. Таким образом, получается система уровнений.

$$K\bar{U} = \bar{F}$$

Здесь $\bar{U}$ – вектор перемещений, $\bar{F}$ - вектор сил. Матрица жесткости системы *K* является симметричной. Для решения системы применяется метод квадратных корней [2].

С целью изучения влияния геометрических размеров оболочки и заполнителя на их напряженно-деформированное состояние при действии массы заполнителя были решены выше сформулированная задача. Свойства материала заполнителя и оболочки были следующие данные:

$\mu_3 = 10,06$ МПа, $\nu_3 = 0,495$, $\nu_3 = 1,6 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³, $E_r = 3$ ГПа,

$E_\varphi = 188$ ГПа, $E_\varphi = 188$ ГПа, $E_з = 125$ ГПа, $\nu_{r\varphi} = 0,14$, $\nu_{\varphi z} = 0,2$,

$\nu_{rz} = 0,35$, $\mu_{rz} = 4$ *ГПа*, $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³.

В результате расчетов установлен характер деформирования упрогого заполнителя.

При исследований влияния геометрических размеров заполнителя и оболочки физико-механические характеристики материала, как оболочки, так и заполнителя оставались неизменными. Здесь анализ перемещений и напряжений в составной конструкций проведен для их значений на контактной поверхности $r = R_1$, на которой напряжение в заполнителе принимают максимальное значение. Для оценки целостности заполнителя именно напряжения на контактной поверхности представляют практический интерес. В самом деле, как известно, наибольшие технологические трудности связаны с прочностью, реализованной в области соединения материала заполнителя с оболочкой.

С увеличением длины конструкций при изменном внутреннем радиусе относительны величины радиальных перемещений возрастают. Это связанно с влиянием увеличивающейся весовой нагрузки с ростом объёма материала заполнителя. Радиальные перемещения отрицательны по отношению к направлению радиуса цилиндра. При малой длине конструкции в верхней зоне контактной поверхностей возможны положительные осевые перемещения, направленные в обратную сторону действующей нагрузки. Такой результат связан с влиянием коэффициента Пуассона материала заполнителя.

Для длинной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем радиальные, окружные и осевые наприжения на поверхности контакта имеют идентичный характер распределения. С уменьшением длины оболочки зона радиальных сжимающих напряжений уменьшается. Для весьма коротких оболочек на половине длины поверхности контакта эти напряжения являются растягивающими. В этом случае линия действия массы заполнителя удалена от срединный поверхности оболочки на относительно большое расстояние и поэтому на несущую оболочку преобладеющее воздействие оказывает пара сил $\gamma - \gamma_з$ и поэтому заполнитель находиться в состояние изгиба. Для типичных свойств материалов заполнителей растягивающие напряжение представляют с точки зрения прочности заполнителя наибольшую опасность. С приближением к поверхности закрепления (нижняя торцевая поверхность оболочки) уровни всех компонент тензора напряжений резко возрастают. Это означает, что при проектировании подобных изделий должны быть использованы уточненные методики, позволяющие получать реальные оценки. С увеличением длины конструкции максимальные значения контактных напряжений заметно возрастают. Из анализа кривых для касательных напряжений, видно, что для длинных конструкций можно выделить зону краевого эффекта у концов $z / L = 0$, $z / L = 1$ и зону установившихся значений касательных напряжений, а для оболочки с заполнителем на контактной поверхности последняя область исчезает.

Для изучения влияния конусности заполнителя при постоянном нижнем внутренном радиусе R_0^H меняли значение верхнего внутренного радиуса R_0^B то есть при постоянном $(R-R_0^H)/L=2/3$ параметр $(R-R_0^H)/L$ придавали следующее значения: 2\3 (вариант 1), 1\2 (вариант 2), 1\3 (вариант 3), 1\6 (вариант 4), и 0 (вариант 5).

Результаты исследования. Полученные результаты в сравнении с результатами распределение радиальных напряжений на поверхности заполнителя с оболочкой показывают, что формы заполнителя существенно влияет на поле перемещений. В исследованных вариантах конусность заполнителя позволяет почти в 2 раза снизить значение осевых перемещений на нижней торцевой поверхости заполнителя. Таким образом, это конструктивное решение позволяет регулировать кинематику перемещений нижнего торца при экспулатационных перегрузках. Интересно отметить, что при малой конусности система становится более жесткой по сравнинию с составной конструкцией, имеющей цилиндрической заполнитель. Однака при дальнейшем увеличении конусности радиальная податливость составной конструкций начинает расти и наибольшего значения она достигает для варианта 5.

Во всех случаях можно видеть, что основное напряженное состояние концентрируется в окрестности закрепленной торцевой поверхности цилиндрической оболочки. При этом максимальное значение сжимающих напряжений являются наибольшими для циндрического заполнителя. Когда заполнитель имеет форму полого цилиндра, на поверхность константа (вдоль R) нижней части радиальное напряжение является сжимающим, а на верхней растягивающим. Однака уровень сжимающих напряжений на порядок превышает уровень растягивающих напряжений, что не позволяет оценить фактический уровень, радиальных напряжений растяжения.

Степень концентраций осевых напряжений в окрестности закрепленности поверхности увеличивается по мере повышения конусности заполнителя составной конструкций. Такой же эффект увеличения степень концентрации напряжений по мере повышения конусности заполнителя составной конструкции можно видеть на контактной поверхности и для касательных напряжений. Касательные напряжения достигают абсолютного максимума для составных конструкций с отношением $(R-R_0^B)/L,$ равным 1/6 (вариант 4). Несколько меньшее значение оно принимает для $(R-R_0^B)/L,$ равного 0 (вариант 5). Уровни максимальных значений касательных напряжений для составных конструкции $(R-R_0^B)/L,$ равными 2\3 (вариант 1), 1\2 (вариант 2) и 1\3 (вариант 3) мало отличаются друг от друга.

Увеличение конусности при постоянном значении нижнего радиуса приводит к росту зоны сжимающих окружных напряжений. Распределения окружных и осевых напряжений в заполнителе на поверхности контакта заполнителя с оболочкой совпадают с характером распределения радиальных напряжения.

Заключение. Полученные числовые результаты показывают, что увеличение конусности при постоянном значении нижнего радиуса приводит к уменьшению по абсолютной величине всех компонентов напряжений на поверхности контакта $(R_1=r)$ за исключением касательных напряжений, которые являются критическими для адгезионного слоя – контактной поверхности оболочки и заполнителя. Явная концентрация напряжений в окрестности закрепленной торцевой поверхности цилиндрической оболочки является обоснованием необходимости разработки методов расчета составных конструкций на базе пространственных подходов методов деформирующего твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977, 415 с.
2. Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород. Алматы, Наука, 1975, 209 с.
3. Литвинов А.Н. Термоупрогое напряжения в круглых многослойных упругих элементов. Новые промышленное технологий. -2000, №5, с.64-68
4. Ильгямов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М. Наука, 1977, 33/с.
5. Елтышев В.А. Напряженно – деформированное состояние оболочечных конструкций с наполнителем. М., Наука, 1981, 120с.

М.Ж. Жумабаев, А.Б. Шыракбаев

Шерхан Мұртаза атындағы Тараз инновациялық институты

Тараз, Қазақстан

ЦИЛИНДРЛІК ҚАБЫҚ ТОЛТЫРҒЫШПЕН

Аңдатпа. Соңғы ұзындықтағы серпімді толтырғышпен ауыр (-толтырғыштың меншікті салмағы) ортотропты цилиндр қарастырылады. Толтырғыш қуыс цилиндр немесе конус түрінде болады. Сыртқы бетінде агрегат қабықпен тығыз бекітілген, сондықтан агрегаттан қабыққа ауысқан кезде орын ауыстыру векторы мен кернеу векторы үздіксіз өзгереді.

Кілт сөздер: Цилиндрлік қабық, кернеу, жүктелген бет, үшбұрыш, байланыс.

M.Zhumabaev, A. Shyrakbaev

International Taraz innovative institute named after Sh. Murtaza

Taraz, Kazakhstan

CYLINDRICAL SHELL WITH FILLER

Annotation. An orthotropic cylindrical with a heavy elastic filler of finite length with a tension (- specific gravity of the filler) is considered. The filler has the shape of a hollow cylinder or cone. Along the outer surface, the filler is rigidly bonded to the shell so that the displacement vector and stress vector change continuously during the transition from the filler to the shell.

Key words: Cylindrical shell, stress, loaded surface, triangle, bond.